第五章　代数结构

代数结构又称为代数系统或抽象代数。用代数方法建立的模型称为代数系统。它在计算机领域有重要作用，特别是计算机安全方面：加密、解密等方面会用到代数系统的理论。

- 代数系统的引入
- 运算及其性质
- 半群
- 群与子群
- 阿贝尔群和循环群
- 同态与同构
- 环

5-1 代数系统的引入

1、n元运算：

$f: A^n \to B$的函数，则称f为A上的n元运算

（代数系统中运算的概念）

如 $f: N \to N$ $f(n)=n+1$ 则f为N上的一元运算

$g: R \to R$ $g(x)=\lceil x \rceil$求不小于x的最小整数

$\lceil 2 \rceil=2$,$\lceil 2.3 \rceil=3$ $\lceil -2 \rceil=-2$, $\lceil -2.3 \rceil=-2$

则g为R上的一元运算

$f: Q \to R$ $f(x)=\sqrt{x}$ 则f是Q上的一元运算

5-1 代数系统的引入

f: $R^2 \to R$　$f(x, y)=x+y$（或$x-y$, $x\times y$, $x\div y$）则f是R上的二元运算

在数学中，用+,–,×,÷,/来表示运算，而在代数系统中，用*表示运算

（注意：*是一个抽象的运算符号，可表示+,– ,×,/或其他运算）

*：$A^2 \to B$　$\langle a, b\rangle \to a*b$　$\therefore *\langle a, b\rangle = a*b$

可用函数来表示运算，也可利用给出运算结果来表示一个运算：

如A={α,β,γ}

*	α	β	γ
α	α	α	β
β	β	α	γ
γ	α	β	γ

5-1 代数系统的引入

2、封闭：

对于*：$A^n \to B$ 若$B \subseteq A$，则称运算*是封闭的

如上面所举例$f(n)=n+1$ $g(x)=\lceil x \rceil$等则分别在N，在R上封闭

而$f(x)=\sqrt{x}$ 则不封闭

3、代数系统：

定义：非空A，若干个A上的运算$f_1,f_2,.f_k$所组成的系统称为一个代数系统，记作$\langle A,f_1,f_2,\ldots,f_k\rangle$.

如〈N，+〉，<Q，+，-，×，÷>均是代数系统

若$S\neq\varnothing$，则$<P(S),\cup,\cap>$也是代数系统

5-2 运算及其性质

1、封闭性：

〈A，∗〉，即∗是A上二元运算，如果对∀a, b∈A, 都有 $a*b\in A$ 则称运算∗是封闭的。

2、交换律：

〈A，∗〉，∗是A上的二元运算，若对∀a, b∈A,a∗b=b∗a, 则称∗是可交换的。

例A=Q（Q为有理数集），Δ为Q上二元运算，定义∀a, b∈Q，aΔb=a+b−a×b, 则Δ是可交换的，∵aΔb=a+b−a×b, bΔa=b+a−b×a=a+b−a×b=aΔb, ∴Δ是可交换的。

5-2 运算及其性质

3、结合律：

〈A，∗〉，∗是A上的二元运算，若对$\forall a, b, c \in A$,都有$(a*b)*c = a*(b*c)$,则称∗是可结合的。

例$A \neq \Phi$, ★为A上二元运算，$\forall a, b \in A$，a★b=b, 则★满足结合律

$\forall a, b, c \in A$, (a★b)★c=b★c=c, a★(b★c)=a★c=c, ∴★是可结合的

4、分配律：

<A,∗,Δ>,若对$\forall a, b, c \in A$,有$a*(b\Delta c)=(a*b)\Delta(a*c)$, $(b\Delta c)*a=(b*a)\Delta(c*a)$则称∗对于Δ是可分配的（要求左右分配均满足）

如$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$　$(b+c)\times a=b\times a+c\times a$

∗,Δ是一般定义上的抽象符号。

5-2 运算及其性质

例A={α,β}，*，Δ如下

*	α	β
α	α	β
β	β	α

Δ	α	β
α	α	α
β	α	β

则*对Δ可分配吗？Δ对*呢？

αΔ（α*β）=αΔβ=α　(αΔα)*(αΔβ)=α*α=α

要求对集合A中任意元素都成立，共有8×2种左右分配，一一验证可知成立，∴Δ对*可分配

而*对Δ不分配：β*（αΔβ)=β*α=β,而(β*α)Δ(β*β)=βΔα=α

∴*对Δ不可分配

5-2 运算及其性质

5、吸收律：

〈A，∗，Δ〉，∗，Δ均可交换，若$\forall a, b \in A$，有$a*(a\Delta b)=a$，$a\Delta(a*b)=a$，则称∗和Δ满足吸收律。

例：∗运算：$a*b=\max(a,b)$ ★运算：$a★b=\min(a,b)$ 可交换成立

$a*(a★b)=\max(a,\min(a,b))=a$，$a★(a*b)=\min(a,\max(a,b))=a$

∴吸收律成立

例：∧，∨也满足吸收律。【有$P\vee(P\wedge Q)=P$；$P\wedge(P\vee Q)=P$】

5-2 运算及其性质

6、等幂律：

〈A，*〉，若对$\forall a\in A$，有$a*a=a$，则称*是等幂的或是幂等的。对幂等运算有$\forall n\in N$且$n>1$，$a^n=a$

例：$S\neq\varnothing$，对代数系统$\langle P(s),\cup,\cap\rangle$，$\forall A\in P(s)$，有$A\cup A=A$，$A\cap A=A$，

$\therefore\cup,\cap$是等幂的

5-2 运算及其性质

7、幺元（单位元）：

〈 A，*〉，若有$e_l \in A$, 对$\forall x \in A$, 有$e_l * x = x$, 则称e_l为A中关于*的左幺元。【如A=R，*：× $\forall x \in R$, $1 \times x = x$ ∴1是左幺元】

若有$e_r \in A$, 对$\forall x \in A$, $x * e_r = x$, 则称e_r 为A关于*的右幺元。【如$x \times 1 = x$ ∴1也是右幺元】

若有$e \in A$, e既是左幺元又是右幺元，则称e是A上关于*的幺元。【1是R上关于×的幺元】

R上关于+的幺元为0（∵$0+x=x+0=x$）

5-2 运算及其性质

不同运算可有不同幺元，也可无幺元。

可有左幺元而无右幺元；有右幺元而无左幺元。

若存在e_l和e_r则必有幺元存在

定理： 〈A，*〉， *是A上的二元运算，若∃左幺元e_l和右幺元e_r，则$e_r = e_l = e$，且e是唯一的。

证明：（e是幺元）设e_r，$e_l \in A$，$e_l = e_l * e_r = e_r = e$

（唯一性）假设若有幺元$e_1 \in A$，则$e_1 = e_1 * e = e$

∴e是唯一的。

5-2 运算及其性质

8、零元：

〈A，*〉，若有$\theta_l \in A$，对$\forall x \in A$, 有 $\theta_l * x = \theta_l$, 则称为A中关于*的左零元。【如R上 $0 \times x = 0$, $\therefore 0$是θ_l 】

若有$\theta_r \in A$，对$\forall x \in A$, 有 $x * \theta_r = \theta_r$, 则称θ_r为A中关于*的右零元。【如R上 $x \times 0 = 0$ $\therefore 0$是θr】

若有一$\theta \in A$，既是左零元又是右零元，则称θ是A中关于*的零元，有$\theta * x = x * \theta = \theta$。【如0是R中关于×的零元, 即<R，×>有 $\theta = 0$，R中关于+没有零元 即〈R，+〉无 θ】

零元与幺元类似：可有左零元而无右零元，可有右零元而无左零元，也可有可无。同时存在θ_l， θr 时两者相等

5-2 运算及其性质

定理：〈A，*〉， *是A上的二元运算，A中关于*有左零元θ_l和右零元θ_r ，则$\theta_l = \theta_r = \theta$，且θ是唯一的。

定理：〈A，*〉为一代数系统，且A中元素个数大于1，如果A中有幺元e和零元θ，则$\theta \neq e$。

如：〈R，×〉这一代数系统中， θ相当于R中的0，而e相当于R中的1，即$\theta=0$，$e=1$，$1\neq 0$。

5-2 运算及其性质

9、逆元：

〈A，*〉， *是A上的二元运算，e是幺元，如对某个a∈A, ∃b∈A, 使得b*a=e,则称b是a的左逆元【如<R,×>， e=1, $\frac{1}{2}\times 2=1$, $\frac{1}{2}$是2的左逆元

如果a*b=e，则称b为a的右逆元【如<R,×>, $2\times\frac{1}{2}=1$, $\frac{1}{2}$ 是2的右逆元】

如果b既是a的左逆元又是a的右逆元，则称b是a的一个逆元，记b=a⁻¹(只是记号，并不代表倒数）【如<R,×>， $\frac{1}{2}=2^{-1}$】

〈R，+〉中，x+(−x)=0 ∴x^{-1}=(−x)

5-2 运算及其性质

例：S={α,β,γ,δ,ξ}，*定义如下，试求各元素逆元。

*	α	β	γ	δ	ξ
α	α	β	γ	δ	ξ
β	β	δ	α	γ	δ
γ	γ	α	β	α	β
δ	δ	α	γ	δ	γ
ξ	ξ	δ	α	γ	ξ

∴α是幺元$\alpha^{-1} \leftrightarrow \alpha$

β的左逆元为γ，δ　　右逆元为γ

γ的左逆元为β，ξ　　右逆元为β，δ

δ的左逆元为γ　　右逆元为 β

ξ的左逆元无　　右逆元为γ

∴β有逆元γ

5-2 运算及其性质

定理：<A, $*$ >有e,若任意x $\in$A,都有左逆元,且$*$是可结合的，则任一元素x的左逆元必是它的右逆元，且x的逆元是唯一的。

定义逆元时先有幺元

5-2 运算及其性质

- **例：构造代数系统，使其中只有一个元素有逆元。**

  解： $T=\{x \mid x \in I, m \le x \le n, m \le n\}$，则$<T,max>$ 幺元是m, 仅有m 有逆元, $\because$ max(m,m)=m.

  （$\forall x, x \in T$, max(x,m)=x）

5-2 运算及其性质

- 例：构造一代数系统，每一个元素都有逆元。

解：$N_k=\{0,1,2,\ldots,k-1\}$ $+_k$ 为模 k 加法

x、$y \in N_k$.

$$x +_k y = \begin{cases} x+y, & x+y < k \\ x+y-k, & x+y \geq k \end{cases}$$

$< N_k, +_k >$幺元是$0, 0^{-1}=0$, $\forall x \in N_k$, $x \neq 0$

$x^{-1} = k - x$

$\because x+ x^{-1}=x+(-x)=k$

$\therefore x +_k x^{-1}=0$

5-2 运算及其性质

封闭性：表中每个元素都属于A

可交换性：表关于主对角线对称

等幂性：主对角线元素与所在行(列)头元素相同

零元：所在行(列）元素与该元素（零元）相同

幺元：所在行(列）元素与运算表的列(行) 相同

任一元素a的逆元：a所在行(列）中的幺元对应的列(行)头元素

5-3　半 群

半群是一种特殊的代数系统

1、广群：

$\langle A, * \rangle$是代数系统（$A \neq \Phi$），$*$是A上的二元运算，若$*$是**封闭的**，即对$\forall x$、$y \in A$，$x * y \in A$，则称$\langle A, * \rangle$为**广群**

2、半群：

若$\langle A, * \rangle$是广群（$A \neq \Phi$），且$*$是可结合的，则称代数系统$\langle A, * \rangle$为**半群**（**封闭、可结合**$\Leftrightarrow$半群）

5-3　半 群

例：　1.$<R, \cdot>$ 是半群。

2.$<R,/>$不是广群，不是半群

$\because$ x/0不存在，结果不在R中。

（x/y）/z $\neq$ x/（y/z）

3.$< I^{+}, ->$不是广群，也不是半群。

$\because 1-2=-1 \notin I^{+}$

4.$S_K=\{x|x \in I \wedge x\geq k\}$ $(k\geq 0)$,$<S_k,+>$ 是半群。

若$k<0$,则 +是不封闭的。

5-3 半群

3、子半群

<A, ∗ >是半群，B $\subseteq$ A，若<B, ∗ > 是半群，则称<B, ∗ >是<A, ∗ >的子半群。

定理：

<A, ∗ >是半群， B $\subseteq$ A，若∗在B上是封闭的，则<B, ∗ >是<A, ∗ >的子半群。

例：<R, ·>是半群，[0,1] 、[0,1)、I均是R的子集;

· 在[0,1] 、[0,1)、I上都封闭；

∴ <[0,1], ·> 、<[0,1) ,·>、<I, ·>均是<R, ·>的子半群。

5-3　半 群

定理：

<A, ∗ >是半群，若A是有限集，则必有 a ∈ A，使a ∗ a=a，称a为等幂元。（性质）

4、独异点（单位半群）：

存在幺元的半群<A, ∗ >称为独异点（单位半群）

如 ① <R, ·>，1是幺元，∴ <R, ·>为独异点；

② <R, +>具有封闭性、可结合性且0为幺元，

∴ <R, +>为独异点；

③ <I, ·>也是独异点。

④ <N－{0},+>是半群，但非独异点。

5-3　半 群

定理： <A, ∗ >是独异点，则在∗运算表中，任意两行或两列都不相同

证明： <A, ∗ >是独异点，必存在幺元e ∈ A，则横、竖列有e

∗	..	a	..	e	..	b	..
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a	..	⋮	..	a ∗ e	..	⋮	..
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
e	..	e ∗ a	..	..	..	e ∗ b	..
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
b	..	⋮	..	b ∗ e	..	⋮	..

$\forall a、b \in A, a \neq b$

$a * e = a \neq b = b * e$

∴任两行不同

同理：$e * a = a \neq b = e * b$

∴任两列不同

5-3 半 群

- 介绍一个重要的代数系统：

❖ 例：I为整数集，$m \in I^{+}$

$R=\{ <x,y> \mid x,y \in I, x \equiv y \pmod{m} \}$ ——同余模m关系

则R是等价关系（自反的、对称的、传递的）。

$[a]_R=\{ x \mid x \in I, aRx \}=\{ x \mid x \in I, x \equiv a \pmod{m} \}$=简记为[a]

—— 模m同余类

$[2]=\{\cdots, 2-m, 2, m+2, \cdots\}$

$I/R=\{[0],[1],[2], \cdots,[m-1]\} = Z_m$ ——模m同余类集

在Z_m上定义两个运算：$+_m$，$\times_m$

任意$[i],[j] \in Z_m$　$[i] +_m [j] =[(i+j)(\bmod m)]$

$[i] \times_m [j] =[(i \times j)(\bmod m)]$

（要证$+_m$，$\times_m$运算表中任意两行、两列不相同）

5-3　半 群

证明：只需证$< Z_m , +_m >$, $< Z_m , \times_m >$是独异点

①封闭性

②可结合性 $([i] +_m [j]) +_m [k] = [i] +_m ([j] +_m [k])$

$=[(i+j+k) \bmod m]$

$\times_m$ 类似

③幺元： $+_m$ 幺元 [0]

$\times_m$ 幺元 [1]（重要的类）

$\therefore < Z_m , +_m >$, $< Z_m , \times_m >$是独异点。

5-3 半 群

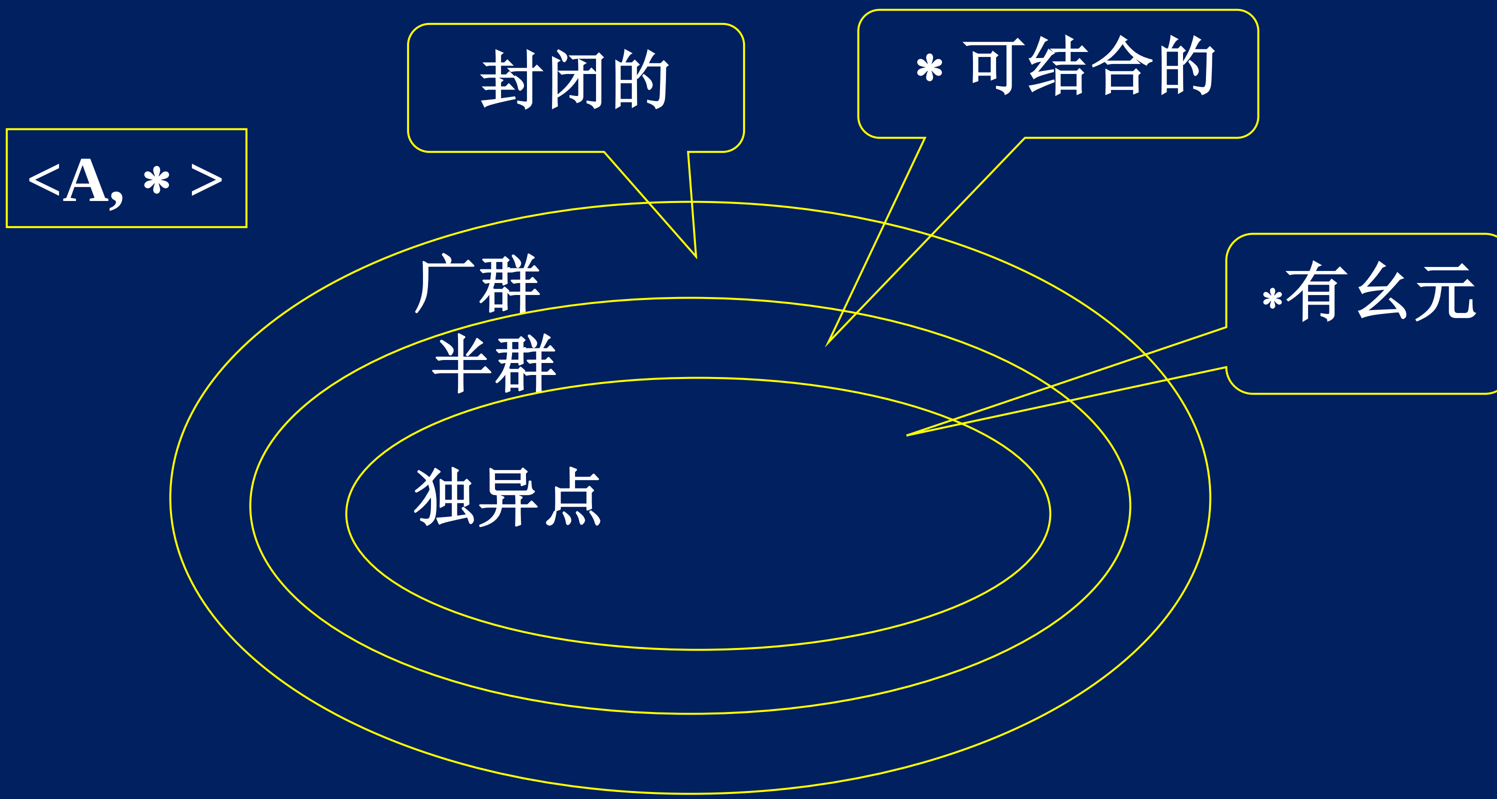
定理： $<A, *>$是独异点，对任意a 、b$\in$ A， a有逆元a^{-1}，b有逆元b^{-1}，则

⑴ $(a^{-1})^{-1}=a$;

⑵ $a * b$有逆元，且$(a * b)^{-1}=b^{-1} * a^{-1}$

5-3　半 群

广群、半群、独异点 三者之间的关系：



5-4　群与子群

1、群：

<A, ∗ >满足：A ≠ Φ，∗是A上二元运算

(1) <A, ∗ >是独异点，

(2) A中每个元素都有逆元

则称<A, ∗ >是群

2、有限群、无限群：

若<A, ∗ >是群，且A是有限集，则称<A, ∗ >是有限群；

|A|=n，n 称为有限群的阶；

若A是无限集，则称<A, ∗ >为无限群。

5-4 群与子群

例：（1）<R, ·>：是独异点 e=1

——不是群，∵0无逆元。

（2）<R－{0}, · >：是群，e=1 $x^{-1}=1/x$。

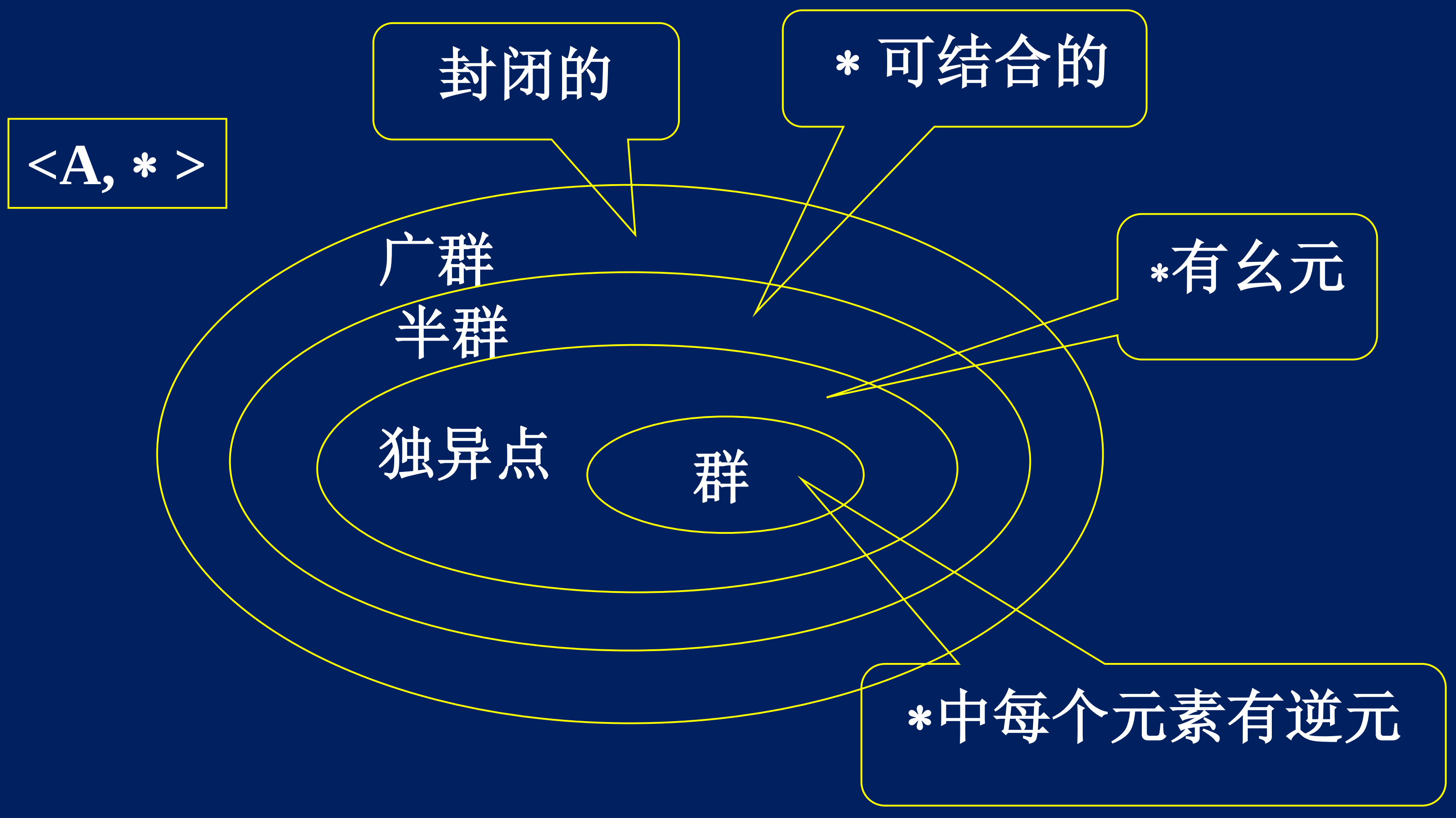
（3）<I, +>：是群，幺元为0 $x^{-1}=-x$。

（4）< ρ(s),⊕>：是群，幺元e=Φ $A\in\rho(s)$ $A^{-1}=A$

（5）<G, ∗ > G={e}是群,{e}和G称为平凡子群。

5-4　群与子群

广群、半群、独异点、群 <u>四者之间的关系</u>：



5-4 群与子群

3、置换：

非空集合S到自身的一个双射称为S的一个置换

若 |S|=n，则S上共有$n!$个不同置换

如 S={a,b,c,d} f={<a,b>,<b,c>,<c,d>,<d,a>}则f是双射

f是s上的一个置换，记做$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$

5-4 群与子群

4、群的性质：

(1) 群中不可能有零元。

证：〈G, * 〉是群， 当 $|G|=1$，G={e},e为幺元，无零元
当 $|G|\neq 1$时，假设有零元 $\theta\in G$,
$x\in G$, $x*\theta=\theta*x=\theta\neq e$, θ无逆元,矛盾

(2) 群满足消去律。即 $\forall a,b,c\in G$,若 $a*b=a*c$,则 $b=c$
或若 $b*a=c*a$, 则 $b=c$

证：若 $a*b=a*c$, $a\in G$有逆元a^{-1},则 $a^{-1}*(a*b)=a^{-1}*(a*c)$

$\therefore (a^{-1}*a)*b=(a^{-1}*a)*c$ 即 $e*b=e*c$ $\therefore b=c$

5-4　群与子群

(3) 群中除了幺元之外，没有其他**等幂元**（幺元是等幂元 e*e=e）

证明：假设 $a\in G$，$a\neq e$,且$a*a=a$, 则

$$a=e*a=(a-1*a)*a=a-1*(a*a) = a-1*a=e$$

与$a\neq e$矛盾！

(4) 在群中，方程**$a*x=b$ 有唯一解**。其中$a,b\in G$

证：要证明$\exists\, x\in G$, 使$a*x=b$, 且 x是唯一的。

$a\in G$, $\therefore a^{-1}\in G$, 取$x= a^{-1}*b\in G$，则

$a*x=a*(a^{-1}*b)=(a*a^{-1})*b=e*b=b$. $\therefore a^{-1}*b$是方程的解

若存在另一解x1，$a*x1=b$,则 $a^{-1}*(a*x1)= a^{-1}*b$

$\therefore (a^{-1}*a)*x1= a^{-1}*b$　即$x1= a^{-1}*b$

5-4　群与子群

(5) 在群〈G,*〉中，*运算表中的每一行或每一列都是G的元素的一个置换。

*	$\ldots b_1 \ldots\ldots b_2 \ldots\ldots\ldots$
⋮	
(1) a	....c.....c......
⋮	

反证法（如左图）：$b1 \neq b2$,

$a*b1 = c = a*b2$

由消去律知：$\therefore b1=b2$（与$b1 \neq b2$矛盾）

∴在同一行中，不可能有两个相同的元素。

5-4 群与子群

(5) 在群〈G,*〉中，*运算表中的每一行或每一列都是G的元素的一个置换。

$*$	… $(a^{-1} * b)$….
⋮	
(2) a	……b…….
⋮	

对$\forall b \in G$，有 $b = a * (a^{-1} * b)$，

而 $a^{-1} * b \in G$，

∴ b出现在a这一行，$a^{-1} * b$所在列中。

∴ G中的每个元素都在每一行中出现。

5-4　群与子群

5、子群、平凡子群：

<G,*>是群，B是G的非空子集，且<B,*>是群，则<B,*>是<G, *>的子群

若B={e}或B=G，则称<B, *>为平凡子群。

定理：<B,*>是<G,*>的子群，则<G,*>中的幺元也是<B,*>中的幺元。

且对任意b∈B，b在<B,*>的逆元b^{-1}也是它在<G,*>中b的逆元。

证：设<B,*>中的幺元是e_1

任意x∈B, $e_1*x = x = e*x$　　群满足消去律　　$\therefore e_1=e$

另可证　　$b*b^{-1}_B = e = b*b^{-1}_G \Longrightarrow b^{-1}_B = b^{-1}_G$

5-4　群与子群

例：<I,+>是群，$I_E=\{x|x=2n,n\in I\}$，证明$<I_E, +>$是$<I, +>$的子群。

证明：易证 I_E 是 I 的非空子集，需证 I_E 是一个群。

1) 封闭性：即证 $x, y\in I_E$， $x+y\in I_E$

有 $x=2n_1$ ，$y=2n_2$，$x+y = 2(n_1+n_2) \in I_E$

2) 结合律：显然成立

3) 幺元：0

4) 逆元：任意$x\in I_E$ ，$x=2n$，有$x'=-2n=2(-n) \in I_E$，使$x+x'=0$

$\therefore <I_E, +>$ 是〈I ，+〉的子群。

5-4　群与子群

子群的两个判定定理：

(1)　<G, *>是群，B是G的非空子集 且 B是有限集，

*在B上封闭，

则<B, *>是<G, *>的子群

(2)　<G,*>是群，$S \subseteq G$，$S \neq \varnothing$，对$\forall a,b \in S$，都有$a*b^{-1} \in S$

$\Leftrightarrow$ <S,*>是<G,*>的子群

5-4　群与子群

(1) <G, *>是群，B是G的非空子集且B是有限集，*在B上封闭，则<B, *>是<G, *>的子群

证明：

（a）封闭性：显然

（b）可结合性：<B, *>是半群（P186定理5-3.1），故可结合

（c）幺元：B为有限集且*封闭，则任意 b必有$b^i=b^j(i<j)$，则有 $b^i = b^i * b^{j-i} = b^i*e$，由消去律可知 b^{j-i} 为<B, *>中幺元。

（d）逆元：

①若j-i=1，则有e=b，即b为<G, *>中幺元，则b的逆元为b.

②若j-i>1，则有$b^{j-i} = b*b^{j-i-1}$，b^{j-i-1}也在B中，可知b^{j-i-1}是b的逆元。

5-4　群与子群

(2)　$<G,*>$是群，　$S \subseteq G$，$S \neq \varnothing$，对$\forall a,b \in S$，都有$a*b^{-1} \in S$

$\Leftrightarrow <S,*>$是$<G,*>$的子群

证：$\Rightarrow$见书P196

$\Leftarrow$显然正确

5-4　群与子群

例：〈H，*〉，〈K，*〉都是〈G，*〉的子群。

则 ①〈H∩K，*〉也是〈G，*〉的子群。

$H \cap K \subseteq G$，至少有 $e \in H \cap K$，$\therefore H \cap K \neq \varnothing$　$\forall a, b \in H \cap K$，

$b^{-1} \in H, b^{-1} \in K$, $\therefore b^{-1} \in H \cap K$

又 $a \in H \cap K$, *在H，K中封闭 $\therefore a * b^{-1} \in H \cap K$

根据子群判定定理2有〈H∩K，*〉是〈G，*〉的子群

5-4　群与子群

例：〈H，*〉，〈K，*〉都是〈G，*〉的子群。

则 ② 若$H \cup K$，则$< H \cup K ,*>$未必是$<G,*>$的子群。

反例：如$<Z_{12} ,+_{12}>$是群（有限群）

H={[0]，[4]，[8]}（封闭）K={[0]，[6]}是子群，

但$H \cup K$ 不是子群 。

如：$[4]+[6]=[10] \notin H \cup K$，不具有封闭性。

5-5 阿贝尔群和循环群

1、阿贝尔群(交换群）：

<G,*>是群，若*在G中可交换，则称<G,*>为**交换（阿贝尔）群**

例1：<R-{0}，·>是群，· 可交换 ∴是交换群

<ρ（S）,⊕>是群， ⊕ 可交换 ∴ 是交换群

例2： S={a,b,c,d} f: S→S

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & \text{元素} \\ b & c & d & a & \text{象} \end{pmatrix}$$

$f^2=f\bullet f$ $f^3=f\bullet f^2$ $f^4=f\bullet f^3 = I$ (恒等映射)

$F=\{f^0, f^1, f^2, f^3\}$ (复合函数形成的集合)

∴ <F, •>是群，而且是阿贝尔群

5-5　阿贝尔群和循环群

2、阿贝尔群的判定定理

定理 $<G,*>$ 是群，$<G,*>$ 是阿贝尔群 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall a,b\in G$，都有 $(a*b)*(a*b)=(a*a)*(b*b)$

证明：$\Rightarrow$

由题意知：*满足交换律和结合律

对 $\forall a,b\in G, a*b=b*a$

$\therefore (a*b)*(a*b)=a*(b*a)*b=a*(a*b)*b=(a*a)*(b*b)$

5-5 阿贝尔群和循环群

$\Leftarrow$即需证交换性

若对$\forall a,b\in G$有$(a*b)*(a*b)=(a*a)*(b*b)$

$\therefore a*(b*a)*b=a*(a*b)*b$

而$<G,*>$是群，$a^{-1},b^{-1}\in G,\therefore a^{-1}*\underline{(a*(b*a)*b)}*b^{-1}$

$$=a^{-1}*\underline{(a*(a*b)*b)}*b^{-1}$$

即（$a^{-1}*a)*(b*a)*(b*b^{-1})=(a^{-1}*a)*(a*b)*(b*b^{-1})$

$\therefore b*a=a*b\quad <G,*>$是阿贝尔群

5-5　阿贝尔群和循环群

3、循环群

定义：$<G,*>$是群，若存在$a \in G$,使得对一切

$b \in G, \underline{b = a^i}$，$i \in I_+$则称

$<G,*>$是循环群，a为生成元。

（G中的任一元可写成a的幂）

$$a^0 = e, a^1 = a, a^2 = a * a, a^3 = a^2 * a$$

5-5　阿贝尔群和循环群

例 $S=\{0^{o},60^{o},120^{0},180^{o},240^{o},300^{o}\}$

☆: 对 $\forall a,b\in S$,　　　$a\star b=(a+b)(\bmod 360^{o})$

☆	0^o	60^o	120^o	180^o	240^o	300^o
0^o	0^o	60^o	120^o	180^o	240^o	300^o
60^o	60^o	120^o	180^o	240^o	300^o	0^o
120^o	120^o	180^o	240^o	300^o	0^o	60^o
180^o	180^o	240^o	300^o	0^o	60^o	120^o
240^o	240^o	300^o	0^o	60^o	120^o	180^o
300^o	300^o	0^o	60^o	120^o	180^o	240^o

$<S,\star>$是群，幺元0^o,逆元存在。

$60^o\rightarrow$ 逆元 300^o, $120^0\xrightarrow{-1}240^o$,

$180^o\xrightarrow{-1}180^o$, $240^o\xrightarrow{-1}120^o$, $300^o\xrightarrow{-1}60^o$

满足交换律　　$a\star b=b\star a$,生成元是60^o

所以$<S,\star>$是阿贝尔群　　$<S,\star>$是循环群

5-5 阿贝尔群和循环群

4、定理：<G,*>是循环群，则<G,*>必是阿贝尔群

证：a为生成元

$\forall x, y \in G$, 则 $x = a^s, y = a^r$

$x * y = a^s * a^r = a^{s+r} = a^{r+s} = a^r * a^s = y * x$

5、定理 $<G,*>$ 是有限循环群, $|G| = n, a-$生成元

则 $a^n = e$, 且 $G = \{a, a^2, a^3, \ldots, a^n = e\}$

n是使 $a^m = e$ 的最小正整数　**称n是a的阶**

5-5　阿贝尔群和循环群

（1）首先由 $e \in G$，a为生成元，可知必有 $k \in I^+$ 使 $e=a^k$。

（2）下面要证 $a^i \neq e, i < n$

反证，若 $\exists m \in I_+, m < n$ 使 $a^m = e$

则 $\forall b \in G, b = a^k$ 　 $k \in I$

$$k = mq + r, 0 \le r < m, b = a^{mq+r} = a^{mq} * a^r = (a^m)^q * a^r = a^r$$

$0 \le r < m < n \therefore G$ 中至多有m个元素，

与 $|G| = n$ 矛盾 $\therefore a^m = e$ 不可能 $\therefore a^k = e \quad (k \ge n)$

5-5　阿贝尔群和循环群

(3)证明：$a, a^2, \ldots, a^n$都不同

$\forall i, j, i \neq j, (0 \leq i < j \leq n,$要证$a^i \neq a^j)$

反证　　假设$a^i = a^j$,则$a^j * a^{j-i} = a^i$

$\therefore a^{j-i} = e$(消去律）　$j - i < n$不可能

（4）由G有n元素，而$a, a^2, \ldots\ldots, a^n$互异

$k \geq n, a^k = e$

$\therefore$必有取n时,$a^n = e,$故n是使$a^k = e$成立的最小正整数

5-5　阿贝尔群和循环群

例：G＝｛α，　β，γ，δ｝

*	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	δ	γ
γ	γ	δ	β	α
δ	δ	γ	α	β

❶封闭❷可结合❸α幺元

❹逆元存在α—α β—β γ—δ

$\gamma^2=\beta$
$\gamma^3=\delta$
$\gamma^4=\alpha$

有生成元γ，δ

<G,*>是循环群，生成元未必唯一。

5-8 同态与同构

讨论两代数系统之间的关系

代数系统<{0,1}, ∨> <{a,b},*>

a---0,b---1,他们是同构的，本质上是一样的。

∨	0	1
0	0	1
1	1	1

*	a	b
a	a	b
b	b	b

1. 同构

<A,¤>和<B,*>是两个代数系统，¤,*分别是A,B上二元运算。

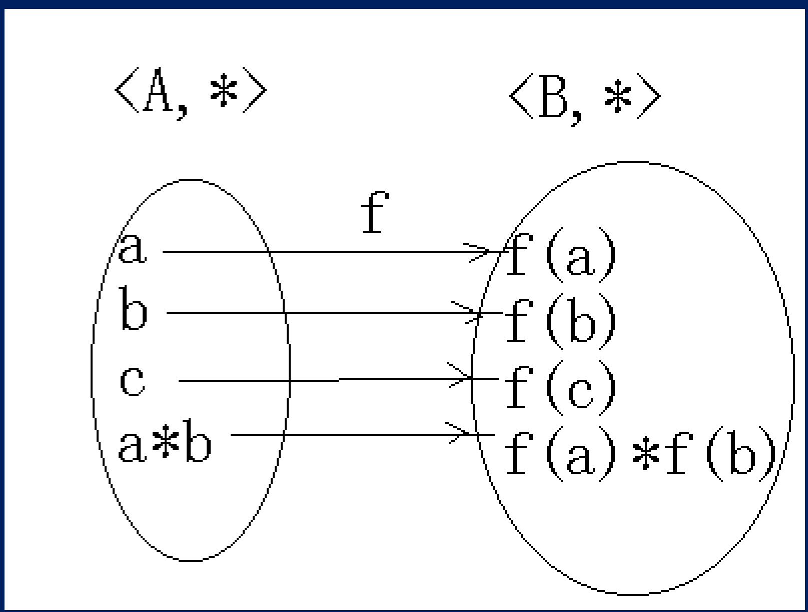
若∃双射f:A→B 使得a,b ∈A

f(a¤b)=f(a) * f(b)则称f是从<A, ¤>到<B,*>的一个同构映射。

<A, ¤>和<B,*>是同构的，记作<A, ¤>≌<B,*>.

上例中：{a,b} → {0,1}　　　f(a)=0 ，f(b)=1.

5-8 同态与同构



$f(a*b)$ 是否等于$f(a) \vee f(b)$

$f(b)=0 \vee 1=1$

$\therefore f$是$\{a,b\} \rightarrow \{0,1\}$的同构映射。

$\langle\{a,b\},*\rangle \cong \langle\{0,1\}, \vee\rangle$

虽然符号不同，但本质上是完全一样的。

5-8 同态与同构

例：$<R,+> \cong <R_{+},\circ>$

$f:R \to R_{+}$. 满足运算

$f(x)=e^{x}$　　$f(x+y)=e^{x+y}$　　$f(x)f(y)=e^{x}e^{y}=e^{x+y}$

$\therefore <R,+> \cong <R_{+},\circ>$　f未必唯一。

2）定理：G是代数系统的集合，则G中代数系统之间的同构关系是等价关系。

证：自反性：$<A,*> \in G$, $\langle A,*\rangle \cong \langle A,*\rangle$　$I_A:A \to A$ 满足运算。

对称性：$<A,*>$, $\langle B,*\rangle \in G$, $\langle A,*\rangle \cong \langle B,*\rangle$, , 则有

$f:A \to B$双射

$f^{-1}:B \to A$ 也满足双射。

传递性：$\langle A,*\rangle \cong^{f} \langle B,*\rangle$　$\langle B,*\rangle \cong^{g} \langle C,+\rangle$

$\therefore \langle A,*\rangle \cong^{g\cdot f} \langle C,+\rangle$ 同构映射。

5-8 同态与同构

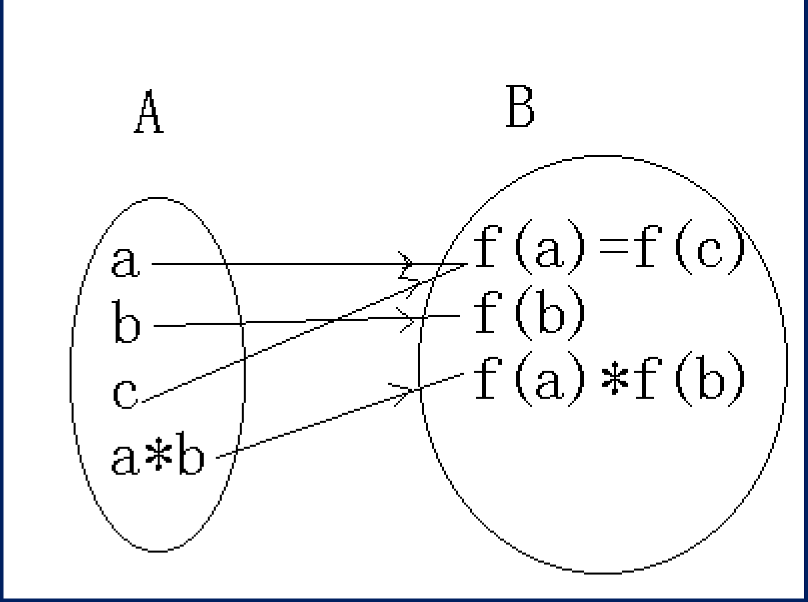
∴可将G分类，同一类中只是形式不同。

若f是映射，则为同态，条件放宽。

2.同态 〈A, ＊〉〈B,*〉同上。若存在映射f:A→B使∀a,b ∈A

f(a ＊b)=f(a)*f(b)则称f是〈A, ＊〉→〈B, *〉的同态映射。

〈A, ＊〉同态于〈B, *〉，运算的象=象的运算。



5-8 同态与同构

例：<I, ． >,<B,*>,B={正，负，零}

*	正	负	零
正	正	负	0
负	负	正	0
零	0	0	0

f: I→B

$x \in I$,

$$f(x)=\begin{cases} 正 & x>0. \\ 0 & x=0. \\ 负 & x<0. \end{cases}$$

对 $\forall a, b \in I$

$f(a.\ b)=f(a)*f(b)$

∴<I, ． >~<B,*> 只研究系统中某些性质（本质的问题）是共同的

5-8　同态与同构

2）定义:f是<A,*>到< B，Δ> 的同态映射，若：

f是A到B的满射,则称f是满同态；

f是A到B的入射,则称f是单一同态；

f是A到B的双射,则称f是A→B的同构。

若f是<A,*>到<A,*>的同态（构）映射，则称是自同态（构）。

3) 性质：若<A,*>$\sim^{f}$<B,Δ >,则

1.若*在<A,*>中封闭，则Δ 在<f(A), Δ >中也是封闭的。

2.若*在<A,*>中满足结合律，则Δ 在<f(A),Δ >中也满足结合律。

3.若*在<A,*>中满足交换律，则Δ 在<f(A), Δ >中也满足交换律。

4.若<A,*>中有幺元，则f(e)是<f(A),Δ>的幺元。

5-8 同态与同构

5.若<A, *>中有零元θ，则f(θ)也是<f(A), Δ>的零元。
6.若对每个x有逆元，则$f(x^{-1})$是f(x)的逆元。

证：4.e是<A,*>的幺元，证f(e)是<f(A),Δ>的幺元。
$\forall x \in f(A)$, x Δf(e)是否等于f(e) Δ x=x ？
存在a ∈A使x=f(a). x Δf(e)=f(a) Δ f(e)=f(a* e)=f(a)=x.
f(e) Δx=f(e) Δ f(a)=f(e* a)=f(a)=x.
∴f(e)是<f(A), Δ>的幺元。

4).推论:f:A→B的同态映射。
1).若<A,*>是半群，则<f(A),*>是半群。
2).若<A,*>是独异点，则<f(A),*>是独异点。
3).若<A,*>是群，则<f(A),*>是群。

5-8 同态与同构

5).若f:A→B的同构映射。

1). <A,*>是半群⇔ <B,*>是半群。

2).<A,*>是独异点 ⇔ <B,*>是独异点。

3).<A,*>是群⇔ <B,*>是群。

4).<A,*>的阶=<B,*>的阶。 |A|=|B|

<A,*> <B,+>

同态 f:A→B映射,f(a*b)=f(a)+f(b) <A,*>~<B,+>

同构 f:A→B双射,f(a*b)=f(a)+f(b) <A,*>≌<B,+>

存在两个群 f:<A,*>→<B,*> 同态,A中幺元e, B中幺元e'

同态核：

1）定义:Ker(f)={x|x ∈A, f(x)=e' }称为f的同态核.

其中e'是<B,*>的幺元

5-8 同态与同构

2)定理：ker(f)是<A,*>的子群。

证：$k \subseteq A$,$k \neq \Phi$, $\forall a, b \in k$, 只要证$a*b^{-1} \in k$即可。

1) $e \in A$, f(e)是B中么元f(e)=e', 所以$e \in k$.

2) $f(a*b^{-1})=f(a)*f(b^{-1})=e'*f(b)^{-1}=e'*e'^{-1}=e'$

2. 同余关系　　（比等价关系强）讨论一种与同态有关的非常重要的关系。

1）定义：代数系统〈A, *〉 R是A上的等价关系

若 $\forall \langle a_1, b_1\rangle \in R, \langle a_2, b_2\rangle \in R$

有$\langle a_1*a_2, b_1*b_2\rangle \in R$, 则称R是关于运算*的同余关系。

5-8 同态与同构

所以同余关系是一种特殊的等价关系，它与代数系统的运算有关。

例：$\langle I,+\rangle$,$R=\{\langle x,y\rangle \mid x\equiv y(\mathrm{mod}3)\}$,R是同余关系。

因为$\langle x_1,y_1\rangle \in R$, $\langle x_2,y_2\rangle \in R$，则$x_1\equiv y_1(\mathrm{mod}3)$, $x_2\equiv y_2(\mathrm{mod}3)$

所以$x_1+x_2\equiv y_1+y_2(\mathrm{mod}3)$ $\langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle \in R$　　R是同余关系。

2）$B \triangleq A/R=\{[x_1]_R, [x_2]_R, \ldots, [x_r]_R\}=\{A_1, A_2, \ldots, A_R\}$（R是等价关系）

B中定义的运算$\ast$

5-8 同态与同构

$x_i \in [x_i]_R$, $x_j \in [x_j]_R$, 若$x_i * x_j \in [x_k]_R$.

则$[x_i]_R * [x_j]_R \in [x_k]_R$ 即$A_i * A_j = A_k$.

称$B=\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$为A关于R的同余类，

$\langle B, *\rangle = \langle A/R, *\rangle$为$\langle A, *\rangle$的商代数。

定理：$\langle A, *\rangle$的商代数是$\langle A, *\rangle$的同态象。

证：$f: A \rightarrow A/R$. a_i所在的分块

当$a_i \in A_i$ $f(a_i)=A_i$ f是$A \rightarrow A/R$的满射.

注意：要证明$\langle B, *\rangle$ *是否确实是B上的一个运算与代表元选取无关，即$a_i \in [a_i]_R$, $a_{i'} \in [a_i]_R$, $a_j \in [a_j]_R$, $a_{j'} \in [a_j]_R$,

$a_i * a_j \in A_k$. $f(a_i * a_j) = A_k$. $a_{i'} * a_{j'} \in A_k$?

即要证$a_i * a_j$与$a_{i'} * a_{j'}$在同一分块中

这是因为R是同余关系

5-8 同态与同构

$<a_i,a_{i'}> \in R$ 　　$\langle a_j, a_{j'} \rangle \in R$在同一分块中。

所以$\langle a_i * a_j, a_{i'} * a_{j'} \rangle \in R$

即$a_i * a_j$与$a_{i'} * a_{j'}$在同一分块中 $\in A_k$. ..

$f(a*b)=A_k=A_i*Aj=f(a)*f(b)$

$a \in A_i, b \in A_j, a*b \in A_k$

3)定理: f<A;☆>→<B,*>的同态映射，则作关系

R:<a,b>∈R⇔f(a)=f(b)

则R是A上的同余关系。

证：R是等价关系

1）自反性 f(a)=f(a) 所以 <a,a>∈R

2)对称性<a,b>∈R=>f(a)=f(b)=>f(a)=f(b) 所以<b,a>∈R

5-8　同态与同构

3)传递性$<a,b>\in R,<b,c>\in R \Rightarrow f(a)=f(b),f(b)=f(c)$

所以$f(a) = f(c) \Rightarrow <a,c>\in R$

设$<a1,b1>\in R,<a2,b2>\in R$则$f(a1)=f(b1)\ \ f(a2)=f(b2)$

$f(a1☆a2)=f(a1)*f(a2)=f(b1)*f(b2)=f(b1☆b2)$

所以$<a1☆a2 , b1☆b2>\in R$

同构：A有性质$P \to B$也有，B有$P \to A$也有

同态：单向$A-B, A$有$\to f(A)$有

5-9 环

研究两个运算的代数系统 $<A,\Delta,*>$ 同一集合上含有两个运算系统，$\Delta,*$有联系，Δ称为加法,$*$称为乘法

如 $<I,+,\cdot>,<Q,+,\cdot><R,+,\cdot>$

一、环

1.定义: $<A,\Delta,*>$ 满足:

1) $<A,\Delta>$ 是阿贝尔群,2) $<A,*>$ 是半群,3) $*$对Δ是可分配的

则称 $<A,\Delta,*>$ 是环。

$<I,+,\cdot>,<Q,+,\cdot>,<R,+,\cdot>$ 均是环。

$<(R)_n,+,\cdot>$ $(R)_n$: n阶实矩阵集合，也是环

5-9 环

2.定理⟨A, +,•⟩是环，$\forall a, b, c \in A$， 则有

(1) $a \bullet \theta = \theta \bullet a = \theta$ 其中θ是加法幺元，

(2) $a \bullet (-b) = (-a) \bullet b = -(a \bullet b)$ 正负得负

(3) $(-a) \bullet (-b) = a \bullet b$ 负负得正

(4) $a \bullet (b - c) = a \bullet b - a \bullet c$ 其中−b是b的加法逆元

(5) $(b - c) \bullet a = b \bullet a - c \bullet a$ $a - b = a + (-b)$

证：(1)，(3) $a \bullet \theta = a \bullet (\theta + \theta) = a \bullet \theta + a \bullet \theta$

$a \bullet \theta$是等幂元，而群中只有幺元是等幂元，

$\therefore a \bullet \theta = \theta$。加法幺元是乘法中的零元

5-9 环

(3)$a \bullet (-b) + a \bullet b = a \bullet (-b + b) = a \bullet \theta = \theta$

$\therefore a \bullet (-b)$的逆元是$a \bullet b$

即$-(a \bullet (-b)) = a \bullet b$

$a \bullet (-b) + (-a) \bullet (-b)$

$= (a + (-a)) \bullet (-b) = \theta \bullet (-b) = \theta$

$a \bullet (-b)$的逆元是$(-a) \bullet (-b)$

即$-(a \bullet (-b)) = (-a) \bullet (-b)$

$\therefore (-a) \bullet (-b) = a \bullet b$

5-9 环

对于$<A,+,\cdot>$

环:1)$\langle A,+\rangle$是阿贝尔群；2)$\langle A,\cdot\rangle$是半群；3)$\cdot$对+可分配。